

## 第六章 祖氏数学世家与中国数学专科教育制度的确立

南北朝是中国古代数学的蓬勃发展时期，祖冲之、祖暅父子的工作在这一时期最具代表性。他们严谨治学，勇于创造，着重进行数学思维和数学推理，在前人刘徽《九章算术注》的基础上前进了一步。

### § 6.1 祖冲之父子及其数学思想

#### 一、祖冲之及其学术成就

**祖冲之**（公元 429～500），字文远，祖籍河北省涿源县人。南北朝宋、齐时代的一位杰出的数学家、天文学家。他的先世迁入江南，祖父掌管土木建筑，父亲学识渊博。祖冲之自幼好学，接受家传的科学知识，尤喜历算，青年时曾任南徐州（今镇江）从事史，后来回建康（今南京）任公府参军。任娄县（今昆山县东北）县令、谒者仆射、长水校尉等职。祖冲之的主要成就有：

##### 1、著《缀术》、《九章算术注》、《重差注》

这些书现都已失传。《缀术》是我国极为重要的数学著作。祖冲之父子的数学研究成果汇集于他的《缀术》中。这本书极其高深，以至于“**学官莫能究其深奥，是故废而不理**”。在隋唐官学中，《缀术》也被列为必读的十部算经之一，且需学习 4 年，年限为各经之首。后来，《缀术》传至朝鲜，但 10 世纪以后，《缀术》渐渐在各国失传了。尽管今天已无从知道《缀术》的具体内容，但从该书在唐代官学中的学习年限及史书中相关的零星记载，我们仍可以想见其学术价值。

##### 2、关于圆周率的计算

据《隋书·律历志》记载，祖冲之确定了圆周率的不足近似值为 3. 1415926，剩余近似值为 3. 1415927，这是世界上首次将圆周率精确到小数点后第 7 位。据推证，祖冲之运用刘徽“割圆术”算到正  $24567(=6 \times 2^{11})$  边形而得出的。因此他必须作一百几十次对九位大数的复杂计算（包括开方），并求得  $\pi$  的“约率”为  $\frac{22}{7}$ ，“密率”为  $\frac{355}{113}$ ，其中“密率”在世界上有着独特的地位，在世界上领先一千年。欧洲直到 16 世纪德国人奥托（Valentinus Otto，约 1550～1605）和荷兰人安托尼兹（Anthonisz）才得出同样结果。

##### 3、关于球体积的计算

祖冲之在刘徽指出的“牟合方盖”与球体积之比才是方与圆的比，从而更正了《九章算术》中关于球体积与外切等高圆柱体体积之比等于圆率与方率之比（ $\pi : 4$ ）的错误的基础上，还与其子祖暅之一起，巧妙地解决了球体积问题。

##### 4、“开差幂”和“开差立”

祖冲之还研究过“开差幂”和“开差立”问题，“差幂”一词在刘徽注中已经用过，是面积差，“差立”不见记载，以理推之应是体积差。“开差幂”和“开差立”应是由面积差或体积差反求有关的边长或直径，其中包括与圆、球有关的问题，涉及到了二次、三次方程求根的问题，祖冲之在求解中甚至“兼以正负参之”，可见其研究水平之高。

##### 5、在天文历法上成就卓著

祖冲之博览当时的名家经典，坚持实事求是，他从亲自测量计算的大量资料中对比分析，发现何承天“元嘉历”误差太大而勇于改进和修改，于大明六年（462 年）终于完成《大明历》，书中首次就用了岁差理论，开辟了中国历法史的新纪元。祖冲之以不畏权势的胆识，与戴兴法开展了坚决的斗争，坚持其大胆改革的正确主张，捍卫真理。

##### 6、在机械制造上多有贡献

还可以说，祖冲之是著名的机械专家。他重造了当时已经失传了的指南车；创制过利用水力舂米、磨面的水碓磨，是当时世界上先进的粮食加工机械；又制造了历史上有名的能日行百余里的“千里船”，在我国造船史上谱写出了引人注目的一页。另外，祖冲之对音律、文学、

考据等方面也有造诣。他还撰写过文学作品《述异记》十卷。祖冲之是历史上少有的博学多才的人物。

总之，祖冲之是我国古代杰出的数学家、天文学家和机械制造家，他不仅受到中国人民的敬仰，同时也受到世界各国科学界人士的推崇。1960年，前苏联科学家们在研究了月球背面的照片以后，用世界上一些最有贡献的科学家的名字，来命名那上面的山谷，其中有一座环形山被命名为“祖冲之环形山”。在前苏联莫斯科大学塑有“祖冲之”全身像，作为世界优秀科学家而纪念他。

## 二、祖暅之及其学术成就

**祖暅之**（5~6世纪），又称祖暅，著名数学家、天文学家，祖冲之之子，字景烁。从小受家学熏陶，曾在梁朝做过员外散骑侍郎、太府卿、南康太守、材官将军、奉朝请等官职。青年时对数学、天文造诣很深，是祖冲之科学事业的继承人。他的主要贡献有：

### 1、修补编辑《缀术》

《缀术》实际上由祖氏父子共同创造，可惜现已失传。估计《缀术》的内容主要是与《九章算术》各章有关的问题，也可能有若干篇是天文历法的计算问题，其中包括圆周率的计算和球体积公式的推导。

### 2、祖暅原理

《九章算术》少广章李淳风所引祖暅之开立圆术，详细记载了祖氏父子解决球体积的方法。刘徽注释《九章算术》时指出球与外切“牟合方盖”的体积比为 $\pi:4$ ，但他未能求出牟合方盖的体积。祖暅在刘徽工作的基础上推导出球体积公式，并提出两立体等高处截面积相等则两体体积相等（“幂势既同则积不容异”）定理，解决了这个问题，给出了球体积的正确公式。这一原理后人称之为“祖暅原理”。西方直至17世纪才被意大利数学家卡瓦列利（B.Cavalieri, 1598-1647）重新发现，西方称为“卡瓦列利原理”。

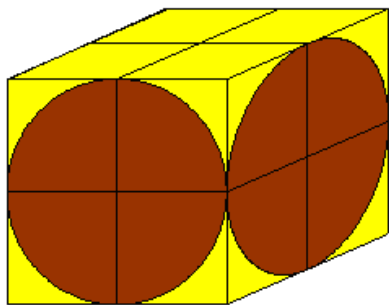
### 3、天文学上的贡献

祖暅著《漏刻经》、《天文录》等。前者已失传，后者存有残篇。他曾于公元504年、509年和510年3次上书建议采用祖冲之的《大明历》，终于被梁武帝钦天监采用颁行，实现了父亲的遗愿。他还亲自监造八尺铜表，测量日影长度，改进了当时通用的计时器——漏壶。

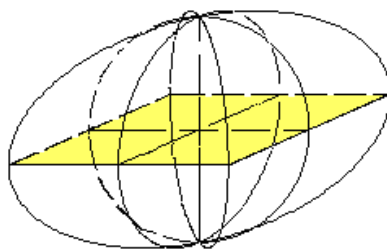
## § 6.2 祖冲之父子对球体积的研究

刘徽发现了《九章算术》“开立圆术”所蕴涵的球体积公式 $V=\frac{9}{16}D^3$ 是错误的，其中D是球直径。他试图利用刘徽原理求出正确的球体积，其做法是：“取立方棋八枚，皆令立方一寸，积之为立方二寸。规之为圆囷，径二寸，高二寸。又复横规之，则其形有似牟合方盖矣。八棋皆似阳马，圆然也。按合盖者，方率也。丸居其中，即圆率也。”这是说，刘徽首先取8个边长为1寸的小立方，堆积在一起构造为1个边长为2寸的大立方。然后作球的外切立方体，然后用两个直径等于球径的圆柱从立方体内切贯穿。于是，球便被包在两圆柱相交的公共部分，而且与圆柱相切。刘徽只保留两圆柱的公共部分，取名“牟合方盖”。

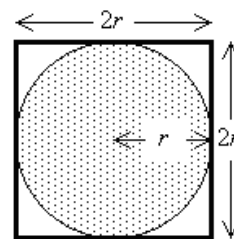
刘徽构造的“牟合方盖”，实际上是由两个同样大小但轴心互相垂直的圆柱体相交而成的立体（图6-1）。由于这立体的外形似两把上下对称的正方形雨伞，所以就称它为“牟合方盖”（图6-2）。在这个立体里面，可以内切一个半径和原本圆柱体一样大小的球体。刘徽并指出，由于内切圆的面积和外切正方形的面积之比为 $\pi:4$ （图6-3）。所以“牟合方盖”的体积与球体体积之比亦应为 $\pi:4$ 。只要求出牟合方盖体积，整个问题就迎刃而解了。可惜的是，刘徽并没有求出“牟合方盖”的体积，只好“以俟能言者”。



(图 6-1)



(图 6-2)



(图 6-3)

数学史家郭书春先生研究指出，从《九章算术》商功章诸题的编排及刘徽注，可以看出，《九章算术》时代，人们通过比较有某种关系的两个等高立体的最大的截面积(通常是底面积)来解决圆体体积，而没有认识到必须任意等高处的截面积之比都等于最大截面积之比，方能作比较，从而错误地认为球与外切圆柱之比为  $\pi : 4$ 。刘徽扬弃了《九章算术》的错误，他认识到必须两立体任意等高处的截面积都成定比，从而把中国古代关于截面积原理的认识提高到理性阶段，为祖暅最后提出“缘幂势既同，则积不容异”的祖暅原理作了准备。

刘徽开辟了通向球体积公式的正确道路但没有达到目标。但他的思路正确，为后人解决这一问题打下了基础。200 年后，祖冲之父子在这条路上继续前进，终于完成了刘徽的未竟之业。祖暅是南北朝时代大数学家祖冲之的儿子。同刘徽一样，除了少量的史料外，我们对祖氏父子二人的认识甚少，就连他们的著作《缀术》亦早已失传，非常可惜。

根据唐代李淳风注《九章算术》“开立圆术”时引用的资料来看，祖暅之确实解决了这一问题。他很可能是是在父亲工作的基础上取得突破的。祖暅在研究球体积时继承了刘徽的思想，抓住关键性的牟合方盖的体积计算。但他吸取了刘徽的教训，不再直接求方盖体积，而是首先研究立方体内除去牟合方盖的部分。他利用了图形的对称性，着重研究这部分

的  $\frac{1}{8}$ ，并称之为“外棋”(图 6-4)，相应的牟合方盖的  $\frac{1}{8}$  为“内棋”，内棋与外棋共同构成“棋”，

即小立方体，它显然是原立方体的  $\frac{1}{8}$ 。

祖暅的方法是先研究原本的“牟合方盖”的八分之一，如图 6-5。设  $OP=h$ ，过 P 点作平面 PQRS 平行于 OABC。又设内切球体的半径为  $r$ ，则  $OS=OQ=r$ 。故此， $PS=PQ=\sqrt{r^2-h^2}$ ，正方形 PQRS 的面积是  $r^2-h^2$ 。

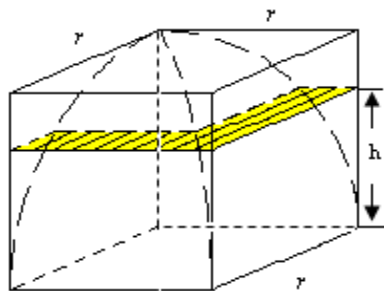


图6-4

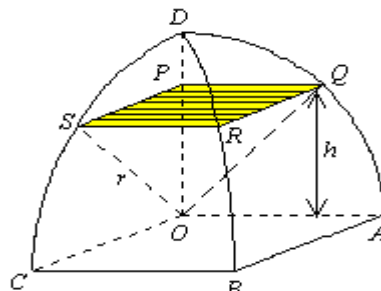


图6-5

祖暅研究了各体积的关系，提出“缘幂势既同，则积不容异”的原理。其中“幂”是面积，“势”是关系，“积”是体积。这句话的意思是：在两立体中作与底平行的截面，若截面积处处相同，则两立体体积相等。如果将图 6-5 的立体放在一个边长为  $r$  的正立方体之内。不难证明图五中阴影部分的面积为  $r^2 - (r^2 - h^2) = h^2$ ，根据祖暅原理，很容易得到外棋与倒立四棱锥体积相等的结论（图 6-6），而棱锥体积为  $\frac{1}{3}r^3$ ，由此知道外棋体积也为  $\frac{1}{3}r^3$ 。所以，有理由相信，将图 6-5 中  $\frac{1}{8}$  个“牟合方盖”的体积，加上图 6-6 中的锥体体积，应该等于图 6-4 的正立方体体积，由此可知八分之一一个“牟合方盖”的体积  $= r^3 - \frac{1}{3}r^3 = \frac{2}{3}r^3$ ，而整个“牟合方盖”的体积为  $8 \times \frac{2}{3}r^3$ 。再跟据刘徽的结论，球体体积则为  $V_{\text{球}} = 8 \times \frac{2}{3}r^3 \times \frac{1}{4} \pi = \frac{4}{3}\pi r^3$ 。

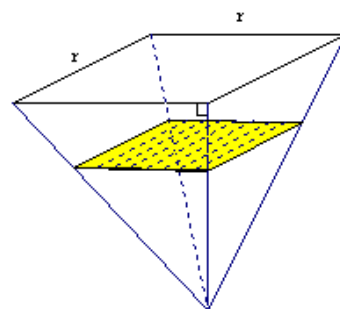


图6-6

这便是正确的球体积公式。自《九章算术》以来，历经 4 个多世纪，这一问题终于得到圆满解决。在祖暅之前，阿基米德曾用平衡法求得球体积公式，两人的工作是各具特色，殊途同归的。

### § 6.3 中国数学专科教育制度的确立

隋唐时代，中国建立了一整套的数学教育制度 形成于周代的数学教育经过秦汉、三国、两晋、南北朝的发展到隋唐时发生根本上的变化。公元 581，隋朝统一中国后，随着政治、经济、文化的繁荣、封建社会的教育有了蓬勃发展。隋代开创科举制度，隋炀帝在位时（公元 605 年～618 年），就实行了考试的方法，始建“进士制”这是我国科举制度的开始。唐代完善了它，这是世界上十分独特的选官制度，对教育的发展起到积极的推动作用。隋朝的国子寺（相当于国立中央大学，公元 607 年改为国子监），设“算学”，有博士（教官）2 人、助教 2 人、学生 80 人。隋朝将算学列入基本国学之一，是我国最早开设数学专科学校的具有世界历史意义的时代，这说明当时数学的专门化程度已得到社会公认，具有设立专科学校的基础，是数学教育史上的一件大事，而且规定考数学中试者也能做官，这在世

界上也是独特的，此举在相当程度上推动了数学和数学教育的发展。

## 一、算学馆与《算经十书》

唐显庆元年(公元 656 年)在国子监添设算学馆，这是当时国子监设立的六个专业之一，算学馆内算学博士“掌教文武八品以下及庶人子弟为生者”，数学家王孝通、刘孝孙等都做过算学博士。算学馆共招收学生 30 人，根据学生的不同程度进行分科教学，主要学习由唐高宗诏令太史令李淳风与算学博士梁述、太学助教王真儒等人注释的十部算经。“书成，高宗令国学行用”，作为算学馆教材，这是世界上第一次由国家颁行的数学教科书，此即是著名的《算经十书》，它们是：《周髀算经》、《九章算术》、《海岛算经》、《孙子算经》、《夏侯阳算经》(夏侯阳注)、《张丘建算经》、《缀术》、《五经算术》、《五曹算经》、《缉古算经》。最后，两组都是各出十道题进行考试。考试通过的学生要报到政府，送到各有关部门任从九品下的低级官吏。

十部算经，颁行于国子监算学馆作为教材，并作为明算科的考试科目。唐之后千余年来，《算经十书》的构成稍有变化。隋唐时期虽然已有了雕版印刷术，可是还未能刊印十部算经，当时只能抄写使用。宋代(960 年~1279 年)，我国封建社会发展到高峰。北宋时期，由于生产力的发展和科学技术的进步，印刷术已广泛使用，使我国古代数学教育有了新发展。宋神宗元丰七年(1084 年)，秘书省翻刻了唐代李淳风等人注释的算学科的教科书，这是为世界上首次印刷的数学著作。此时，算学馆里的学官(相当于今天的重点大学数学系教授)对《缀术》“莫能究其深奥，是故废而不理”。这一状况的直接后果是造成《缀术》失传的悲剧，只刻印了九部。另外据考证，《夏侯阳算经》也非原著，而是唐代中期的《韩延算术》这部书，由于卷上第一章有“夏侯阳曰：-----”，而被误认为是《夏侯阳算经》。南宋鲍瀚之自庆元六年(1200 年)至嘉定六年(1213 年)收集并陆续翻刻刊行(又称鲍刻本)，鲍瀚之在福建汀州学校主持翻刻北宋本九部算经时，又补入《数术记遗》一卷，以取代失传的《缀术》。明代传统数学衰落，宋版算经散佚殆尽，以后，《缉古算经》、《夏侯阳算经》又散佚，而剩下的五部半于 1980 年由文物出版社影印成《宋刻算经六种》，是世上现存最早的印刷本数学著作。

在中国古代数学教育的确立阶段，由于科举制度的产生，数学教育制度的健全，尤其是国子监内的算学科，在学生入学、学生生源条件、学制、采用的教科书、分班进行组织教学、考试方法及毕业出路等方面，均制定了一套比较完善的数学教育制度。

## 二、隋唐时代的数学

隋唐时期，是中国传统数学发展相对沉闷的时期，尽管在数学理论与数学方法都没有多少突出的成就，但在推动数学应用的普及方面却卓有成效。李淳风、王孝通等整理、注释算经十书，隋唐统治者设立明算科开科取士，这些工作都具有开创性，在一定程度上对保存中国传统数学文献和推动传统数学之普及起到了较大作用。而且，隋唐数学也有一些理论成就，主要体现在与历法研究的结合。数学家刘焯、王孝通、张遂等关于二次内插法和三次方程的研究与应用是中国传统数学的重要成果。

### 1. 王孝通与《缉古算经》

王孝通，隋唐数学家。生卒年不可考。他出身平民，少年起开始学习天文、数学，终生研究。王孝通的学术活动在唐代初年，入唐，曾被起用为算学博士(一说为算历博士)，武德九年(626)曾任通直郎太史丞，参加修改历法工作。王孝通著有《缉古算经》一书，主

要是用数字三次方程来解决体积问题和勾股问题，流传至今。无论如何，在中国的《缀术》失传后，《缉古算术》不仅成为中国数学史上首次论述开带从立方的著作，而且是内容和方法上都具有鲜明特色和一定影响力的数学著作。

## 2. 刘焯与二次等间距内插法

刘焯(公元 544~610 年)，隋朝经学家、天文学家。字士元，信都(今河北冀县)人，他聪明好学，是个博学之士，当时有人认为他是“数百年以来，博学通儒，无能出其右者”。刘焯的各种成就，使《皇极历》的科学程度大有提高，虽因太史令张胄玄的反对而未被采用，但其科学价值是不容忽视的。他写《历书》10 卷，所制定的《皇极历》(公元 604 年)是当时最好的历法。刘焯的各种成就，使《皇极历》的科学程度大大提高，虽因太史令张胄玄的反对而未被采用，但其科学价值是不容忽视的。

刘焯的创见很多，主要体现在他的《皇极历》中。例如，他算出的岁差数值最精确。什么是岁差数值？按照天体运行的规律，地球绕太阳一周是一年。但准确地说，这一个冬至点到下一个冬至点的位置是有变化的，冬至点在黄道(从地球上看到太阳一年在天空移动一圈，实际上地球绕太阳一圈，人们看到的太阳移动路线就叫黄道)上大约每年西移 50.2 秒，就 71 年 8 个月差一度。这种冬至点在黄道上的移动距离就是岁差数值。他提出一回归年为  $365\frac{11406.5}{46644}$  日，特别是他提出“黄道岁差”概念，这在中国天文史上是第一次。

刘焯继承了何承天、祖冲之等人的先进思想，创立一种二次等间距内插法，这是我国古代非线性插值法的首创。刘焯的《皇极历》是一部优秀的历法，但在当时却未被采用。后来，唐初李淳风编《麟德历》时曾引用上述公式。《麟德历》被颁行全国，广泛采用。此外，郭献之的《五纪历》、徐昂的《宣明历》、边冈的《崇玄历》以及元代的耶律楚材(公元 1190~1240 年)的《庚午元历》等都沿用这一算法。印度数学家婆罗摩笈多(约 598~660 年)曾于 628 年使用类似的等间距二次内插公式计算正弦值，但已在刘焯之后了。

## 3. 一行与二次不等间距内插法

天算史界有一种流行的看法，认为在中国古代，唐朝天文学家、数学家一行在其《大衍历》中发明了二次不等间距插值法，且一行还有意识地应用了三次差的计算问题。因此，一行在插值法方面的贡献备受中外天算史研究者的关注。

一行(公元 683~727 年)，俗名张遂，魏州昌乐(今河南省南乐县)人，唐代高僧和杰出的天文学家。他聪敏好学，“博览经史，尤精历象、阴阳、五行之学”。由于他东去到了嵩山的嵩岳寺，改名敬贤，取法名一行，从此僧俗人都称他为一行，而本名便无人提起，一行精心钻研天文、数学，还掌握了梵文，成为一位全国有名的学者。当时就有人把他和孔子的高足颜回相提并论。

一行认为，要想编制出好的历法，必须进行实际的测量，于是他在刘焯倡议大地测量之后 100 多年组织了一批天文学工作者进行实际观测，取得了一系列关于日、月、星辰运动的第一手资料，发现了恒星的位置与汉代的研究相比较，有了相当的变化。于是，他废除了沿用 800 多年的二十八宿的相距度数，重新测定二十八宿的相距度数，这样，必然要求提高新历的精确程度。此外，他在研究天文学中，涉及到多种画图问题，他在画圆时用

到了一种特殊的大圆规，可惜后来无人继承。他在晚年写成的《大衍历》中，主张用定气来计算太阳行度，由于两个节气之间的长度不一，他把刘焯的内插公式由等间距推广到不等间距的情形，建立了不等间距二次内插公式。就插值算法本身，一行的算法与刘焯算法实质完全相同。所不同的是，《皇极历》是在以平气为间隔的日躔表基础上插值。而《大衍历》是在以定气为间隔的日躔表上插值。今天常用的牛顿插值公式，其不等间距的形式比等间距的形式要复杂得多。